OPTION SC. NAT.

Durée : 3 heures

Les deux parties sont indépendantes et seront traitées sur des feuilles séparées.

I

$\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$,

$\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des applications indéfiniment dérivables de $(\mathbb{R}^+)^*$ dans $\mathbb{R}$, chacun de ces ensembles étant muni de sa structure habituelle d'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.

On note E le sous-ensemble des applications f appartenant à $\mathcal{C}$ telles que :

$$\forall\, p \in (\mathbb{R}^+)^*, \quad \lim_{t \to +\infty} e^{-pt} f(t) = 0.$$

1° *a.* Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$, qu'il contient les polynômes, les fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^+$ et que, si $(f, g) \in E \times E$, la fonction produit, $f.g : x \longmapsto f(x).g(x)$, appartient à E.

b. Soit $(f, g) \in E \times E$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on note :

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x - t)\, dt.$$

Montrer que l'application $f * g$ ainsi définie appartient à E et que $f * g = g * f$.

Si $f \in E$ et si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}^+$, que peut-on dire de F?

2° *a.* Soit $f \in E$.

Montrer que, pour tout réel p strictement positif, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ est absolument convergente. On note $L_f(p)$ cette intégrale.

Tournez la page S. V. P.

ENS -24- ST-CLOUD FONTENAY 81

Montrer que :

- $\lim_{p \to +\infty} L_f(p) = 0.$
- L'application $L_f : p \longmapsto L_f(p)$ de $(\mathbb{R}^+)^*$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable.
- $L_f \in \mathcal{E}$.

b. Montrer que l'application $L : f \longmapsto L_f$, de E dans $\mathcal{E}$, est linéaire.

c. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (on entend par là que f est dérivable sur $(\mathbb{R}^+)^*$ et admet une dérivée à droite $f'_d(0)$ en 0). On note f' l'application :

$$\begin{cases} t \longmapsto f'(t) & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 \longmapsto f'_d(0). \end{cases}$$

Si f et f' appartiennent à E, calculer $L_{f'}$ en fonction de L_f.

d. Déterminer L_f pour les applications suivantes :

$$\begin{cases} f_1 : t \longmapsto t^n, & n \in \mathbb{N}; \\ f_2 : t \longmapsto \sin at, & a \in \mathbb{R}^*; \\ f_3 : t \longmapsto \cos at, & a \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

e. Déterminer $L_{f_2 * f_3}$ pour $a = 1$. Que remarquez-vous ?

3° Dans cette partie, on admettra les propriétés (1) et (2) suivantes :

(1) L'application L de E dans $\mathcal{E}$ est injective,

(2) $\forall\, (f, g) \in E \times E, \quad L_{f * g} = L_f . L_g.$

On considère le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} f' - ag = \varphi \\ g' + af = \psi \end{cases}$$

où φ et ψ appartiennent à E et $a \in \mathbb{R}^*$.

Utiliser ce qui précède pour trouver toutes les applications f et g dérivables sur $\mathbb{R}^+$, appartenant, ainsi que leur dérivée, à E, et vérifiant le système (S) avec comme conditions initiales $f(0) = g(0) = 0$.

II

Le fonctionnement d'un métier à tisser est perturbé par des ruptures de fil. On désigne par T_1 la variable aléatoire représentant le temps écoulé entre le début du travail et la première rupture du fil; plus généralement, pour i entier strictement supérieur à 1, la variable aléatoire T_i représentera le temps écoulé entre la reprise du travail, après réparation de la $(i-1)^{\text{ième}}$ rupture, et la $i^{\text{ième}}$ rupture.

Les variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_i, \ldots$ sont indépendantes et de même loi; elles suivent une loi exponentielle, c'est-à-dire qu'elles admettent pour densité de probabilité :

$$f : \begin{cases} t \longmapsto 0, & \text{si } t \leqslant 0 \\ t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

où λ est un paramètre réel strictement positif; on notera F leur fonction de répartition.

1° On désigne par $[t]$ la partie entière du nombre réel t et on pose $d(t) = t - [t]$. Soit $d(T_1)$ la variable aléatoire qui prend la valeur $d(t)$ lorsque $T_1 = t$.

a. Démontrer que, θ étant un nombre réel compris entre 0 et 1, la série de terme général $u_n = F(n + \theta) - F(n)$ est convergente.

b. Déterminer la densité de probabilité de la variable $d(T_1)$.

2° A p ruptures successives, on associe les variables $T_1, T_2, \ldots, T_p$.

On désigne par $X = \text{Sup}(T_1, T_2, \ldots, T_p)$ et par $Y = \text{Inf}(T_1, T_2, \ldots, T_p)$ les variables aléatoires représentant respectivement le plus grand et le plus petit intervalle de temps entre deux ruptures.

a. Déterminer la densité de probabilité de X.

b. Déterminer la densité de probabilité de Y.

Tournez la page S. V. P.

3° A p ruptures successives, on associe la variable aléatoire $Z_p = \sum_{j=1}^{p} T_j$, représentant le temps de fonctionnement productif du métier depuis sa mise en marche jusqu'à la $p^{\text{ième}}$ rupture.

a. Déterminer la densité de probabilité de la variable $Z_2 = T_1 + T_2$.

b. Par récurrence, montrer que la densité de probabilité de la variable $Z_p = Z_{p-1} + T_p$ a pour expression

$$f_p \begin{cases} t \longmapsto 0, & \text{si } t \leqslant 0 \\ t \longmapsto \lambda^p \dfrac{t^{p-1}}{(p-1)!} e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Donner l'expression de sa fonction de répartition F_p.

c. Calculer l'espérance de Z_p. Pouvait-on prévoir le résultat?

d. Calculer la variance de Z_p. Pouvait-on prévoir le résultat?

4° Soit R la variable aléatoire représentant le nombre de ruptures qui peuvent se produire dans un intervalle de temps donné : $[0, a[$, l'instant 0 correspondant à la mise en route du métier. Le temps nécessaire aux réparations est considéré comme négligeable. On note Pr (A) la probabilité d'un événement A et $\bar{A}$ l'événement contraire de A.

a. Montrer que :

$$\text{Pr}(R = p) = \text{Pr}\big((Z_p < a) \cap (Z_{p+1} \geqslant a)\big)$$

b. De manière générale, montrer que, si deux événements A et B sont tels que $B \subset A$, alors $\text{Pr}(A) = \text{Pr}(A \cap \bar{B}) + \text{Pr}(B)$.

c. En déduire la loi de probabilité de R.

1 69 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail